量子測定理論の進歩と不確定性原理

名古屋大学大学院情報学研究科 小澤正直

概要

量子測定の統計は測定が行なわれる状態に依存しているにもかかわらず，測定誤差や擾乱などの統計的性質を状態依存的に扱うことには困難があった．本稿では，物理量の可換性や同一性などの基本概念を状態依存的に一般化することにより，量子測定と不確定性原理の状態依存的な理論展開が可能になることを解説する．

1　はじめに

量子力学では，物理量の測定において測定値として得られるのは，その物理量の固有値に限られるが，どの固有値が得られるかは，一般には予測できない. それでは，測定によって得られた固有値は，測定する前からその物理量が所有していた値なのであろうか．標準的な見方では，そのような考えは通用しないとされている．例えば，シュレーディンガー [1, 邦訳 p. 379] は次のように述べている.

> 実在論を放棄するということは数々の論理的帰結をもたらすことになる．ある変数は， 私がそれを測定する以前には，一般にはある確定した値を**もっているとはいえない**．ということはすなわち，ある変数を測定することが，それが**もっている**値を確かめること**ではない**ことになる.

シュレーディンガーはこのような議論の帰結として，測定は，反復可能性仮説を満たすべきであると結論している [1, 邦訳 p. 379].

> 現実が測定値を確定しないとする以上， 少なくとも測定値が現実を確定しなければならない．つまりその測定が行なわれた**後にも**，その測定値はそれだけをとりだしても認知されるものというその意味において，現実に存在するものでなければならない．つまり上に求められた判定基準としては，測定とは，それを繰り返した場合，ふたたび同じ測定値が得られるものでなければならない，というだけでよいことになる.

測定一般に反復可能性を要請することは，シュレーディンガー以外にも，当時広く行なわれていたことである*1.

さて，現在，コッヘン-シュペッカーの定理 [4] やベルの不等式の導出 [5] とその検証 [6, 7, 8] などから，量子力学的不確定性を古典的な実在論（または，非文脈的隠れた変数理論）の下で理解することができないことは決定的となった．では，われわれはシュレーディンガーが上で述べたような結論を受け入れざるを得ないのであろうか．測定を反復可能なものだけに制限することは， 反復可能性をもたない光子数計測のような測定を測定と見なさないことに通じる．すると，現在の光学的実験の多くの成果は，根拠のないものであるという

---

*1 例えば，フォン・ノイマン [2, 邦訳 p. 268] およびディラック [3, p. 36] を参照.

不都合な結論を招くであろう．また，そもそも，量子力学において測定とは，測定される変数の値を生み出すことであって，その変数の値を確かめることではないならば，測定という概念自体に様々な曖昧さが生まれるであろう [9]．にもかかわらず，「測定とは測定される変数が所有している値を確かめることではなく，それ以後の測定値を予測できるように値をつくり出すことである」という反復可能性仮説の根拠を厳密に検討した研究は知られていない．

本稿では，まずこの点を検討して，測定によって実際に得られた値は，測定する前からその物理量が所有していた値であるという見方を支持する統計的予言が，量子力学から導かれることを明らかにしよう．

2 フォン・ノイマンの測定過程

フォン・ノイマン [2] は，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ で表される系 $\mathbf{S}$ の物理量 $A=\sum_n a_n|\phi_n\rangle\langle\phi_n|$ の測定のプロセスを考察して，測定は次のような測定対象 $\mathbf{S}$ と測定装置 $\mathbf{A}$ の合成系のユニタリ変換で表されることを示した．

$$U:|\phi_n\rangle|\xi\rangle\mapsto|\phi_n\rangle|\xi_n\rangle. \tag{1}$$

ここで，$|\xi\rangle$ は装置 $\mathbf{A}$ のヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ に属する状態ベクトル，$\{|\xi_n\rangle\}$ はヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ の正規直交基底であり，$M=\sum_n a_n|\xi_n\rangle\langle\xi_n|$ をメータ物理量と呼ぶ．対象 $\mathbf{S}$ の初期状態を $|\psi\rangle=\sum_n c_n|\phi_n\rangle$ とすると，U の線形性から

$$U|\psi\rangle|\xi\rangle=\sum_n c_n|\phi_n\rangle|\xi_n\rangle \tag{2}$$

が得られる．

変換 (2) が測定と見なされる理由について，フォン・ノイマン [2, p. 440] は次のように述べている．

> 観測者 III の観点からは，この過程が測定と見なされるためには，次の条件が必要である：もし，III が同時測定可能な物理量 A と M（それぞれ，I および II における，または，ともに I+II における量）を測定すれば，値の組 a_n, a_m の確率は $m\neq n$ のときは 0，かつ $m=n$ のときは $|c_n|^2$ である．つまり，I における A を測定するためには，II を「観測すれば」十分である．なお，量子力学からさらに $|c_n|^2=|\langle\psi|\phi_n\rangle|^2$ が成り立つことが必要である．[一部改訳]

フォン・ノイマンの議論を整理すると，フォン・ノイマンの測定過程が物理量 A の測定と見なされる理由として，次の２つの条件が挙げられている[*2]．

(P1) 確率再現可能性: $\Pr\{M(\tau)=a_n\}=\Pr\{A(0)=a_n\}$.
(P2) 反復可能性仮説：$\Pr\{A(\tau)=M(\tau)\}=1$.

ここで，$\Pr\{A(\tau)=M(\tau)\}$ は，

$$\Pr\{A(\tau)=M(\tau)\}=\sum_x \Pr\{A(\tau)=x, M(\tau)=x\} \tag{3}$$

と定義され，$\Pr\{A(\tau)=M(\tau)\}=1$ は，$x\neq y$ ならば $\Pr\{A(\tau)=x, M(\tau)=y\}=0$ が成立することと同値である．

---

*2 ここで，測定相互作用は時刻 0 から時刻 τ まで挿入され，U は時刻 0 から時刻 τ までの合成系 $\mathbf{S}+\mathbf{A}$ の時間発展を表す．ハイゼンベルク描像に基づき，$A(0)=A\otimes I, M(0)=I\otimes M, A(\tau)=U^\dagger A(0)U, M(\tau)=U^\dagger M(0)U$ 等と定義される．

さて，古典物理学的な観点に立てば，測定過程とは，測定直前の被測定物理量 $A(0)$ の値を，測定直後のメータ物理量 $M(\tau)$ の値として再現することである．つまり，次の条件が測定過程を特徴付ける．

(P3) 所有値再現可能性: $\Pr\{M(\tau)=A(0)\}=1$.

測定直前の状態が被測定量 A の固有状態であれば，確率再現可能性から $\Pr\{M(\tau)=a_n\}=\Pr\{A(0)=a_n\}=1$ が得られるので，(P3) が成り立ち，測定値は測定直前の値を再現している．しかし，重ね合わせ状態の場合，定説ではそのような結論を得ることはできないと考えられてきた．そのため，測定直前の状態が重ね合わせの場合は，測定直前には存在していない値が測定の過程で測定値として作り出されるという考え方がされるようになった．しかし，実際に (P1) や (P2) から (P3) が導かれないとする no-go 定理は知られていない．以下では，(P1) や (P2) から (P3) が導かれる可能性について検討しよう．

3　状態依存的可換性

ところで，量子力学の標準的な定式化でこの問題に答えるにはある種の困難が指摘されてきた [10]．というのは，$\Pr\{M(\tau)=A(0)\}$ という確率の計算方法が確立していないからである*3．ところが，必ずしも可換であるとは限らない二つの物理量 X,Y の結合確率を計算する一般的な方法が 1932 年にフォン・ノイマン [2, pp. 185–187] によって与えられている．

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ で定義された交換可能でない二つの物理量 X,Y が与えられたとしよう．この仮定にも関わらず，X と Y の共通の固有状態があり得る．ただし，このような固有状態から完全直交系をつくることはできない．よって，X と Y の共通の固有状態で張られる閉部分空間 $\mathcal{M}_{X,Y}$ は，全空間 $\mathcal{H}$ より小さいはずである．この閉部分空間 $\mathcal{M}_{X,Y}$ は X と Y の共通の不変部分空間であり，その上で X と Y は交換可能である．すると，$\mathcal{M}_{X,Y}$ に属する状態 $|\psi\rangle$ に対しては，X と Y は同時に測定可能であり，その結合確率が

$$\Pr\{X=x,Y=y\}=\langle\psi|P^X(x)P^Y(y)|\psi\rangle \tag{4}$$

で定義される*4．この場合，結合確率分布 $\mu(x,y)=\Pr\{X=x,Y=y\}$ は X と Y の任意の多項式 $f(X,Y)$ に対して，

$$\langle\psi|f(X,Y)|\psi\rangle=\sum_{x,y}f(x,y)\mu(x,y) \tag{5}$$

を満たす．一般に，(5) を満たす 2 次元の確率分布 $\mu(x,y)$ を物理量 X と Y の状態 $|\psi\rangle$ における結合確率分布と呼ぶ．

ところで，物理量 X,Y のそれぞれの固有値 x,y に対応する共通の固有状態の全体は閉部分空間をなし，そこへの射影は $P^X(x)\wedge P^Y(y)$ で表される*5．よって，閉部分空間 $\mathcal{M}_{X,Y}$ への射影は $\sum_{x,y}P^X(x)\wedge P^Y(y)$ で表される．これを，物理量 X,Y の論理的交換子と呼び，$\mathrm{com}(X,Y)$ で表す．すると次の定理が成り立つ [11, 12].

---

*3 $\Pr\{M(\tau)=A(0)\}$ が計算されるためには，結合確率 $\Pr\{A(0)=x,M(\tau)=y\}$ が計算されなければならない．一般には，結合確率 $\Pr\{A(0)=x,M(\tau)=y\}$ は $A(0)$ と $M(\tau)$ が可換な場合に定義される．A と M は異なる系の物理量なので，$A(0)$ と $M(0)$ や $A(\tau)$ と $M(\tau)$ のように同時刻では交換可能，つまり，$[A(0),M(0)]=[A(\tau),M(\tau)]=0$ であるが，一般に $[A(0),M(\tau)]=0$ であると結論することはできない．

*4 $P^X(x)$ は，部分空間 $\{\psi\in\mathcal{H}\mid X|\psi\rangle=x|\psi\rangle\}$ への射影を表し，物理量 X の単位の分解と呼ばれる．

*5 $E\wedge F$ は二つの射影 E,F の値域の共通部分への射影を表す．

定理 1. 任意の物理量 X, Y と状態 $|\psi\rangle$ に対して以下の条件はすべて同値である．

(i) $|\psi\rangle \in \mathcal{M}_{X,Y}$，すなわち，$\|\mathrm{com}(X,Y)|\psi\rangle\|^2 = 1$.
(ii) 状態 $|\psi\rangle$ は物理量 X, Y の共通の固有状態の重ね合わせである．
(iii) 物理量 X と Y の状態 $|\psi\rangle$ における結合確率分布が存在する．
(iv) 任意の実数 x, y に対して，$[P^X(x), P^Y(y)]|\psi\rangle = 0$.
(v) 任意の多項式 f, g に対して，$[f(X), g(Y)]|\psi\rangle = 0$.

上の条件の一つが成立するとき，物理量 X, Y は状態 $|\psi\rangle$ において交換可能であると言われる．一般に，状態 $|\psi\rangle$ において物理量 X, Y が交換可能な確率は，

$$\Pr\{\mathrm{com}(X,Y)\} = \|\mathrm{com}(X,Y)|\psi\rangle\|^2 \tag{6}$$

で与えられる．

4 量子完全相関

物理量 X, Y が状態 $|\psi\rangle$ において交換可能であれば，その結合確率を用いてそれらの物理量の値の間に成立する関係について述べることが可能になる．そのもっとも基本的な関係は，明らかに相等関係である．そこで，物理量 X, Y は状態 $|\psi\rangle$ において交換可能であり，その結合確率が $\Pr\{X = Y\} = 1$ を満たすとき，X と Y は状態 $|\psi\rangle$ において完全相関すると呼ばれる．ただし，$\Pr\{X = Y\}$ は，

$$\Pr\{X = Y\} = \sum_x \Pr\{X = x, Y = x\} \tag{7}$$

と定義される．このとき，X と Y が完全相関する状態 $|\psi\rangle$ で張られる閉部分空間への射影は，

$$[\![X = Y]\!] = \bigvee_x P^X(x) \wedge P^Y(x) \tag{8}$$

で表され，X と Y が状態 $|\psi\rangle$ において完全相関する確率は，$\Pr\{X = Y\} = \|\,[\![X = Y]\!]|\psi\rangle\|^2$ を満たす．ここで，ベクトル $|\psi\rangle, X|\psi\rangle, X^2|\psi\rangle, \ldots$ で張られる閉部分空間を，物理量 X と状態 $|\psi\rangle$ で生成される閉部分空間と呼び，$\mathcal{C}(A, |\psi\rangle)$ で表す．このとき，次の定理が成り立つ [13].

定理 2. 任意の物理量 X, Y と状態 $|\psi\rangle$ に対して以下の条件はすべて同値である．

(i) X と Y は状態 $|\psi\rangle$ において完全相関する．
(ii) $x \neq y$ ならば $\langle\psi|P^X(x)P^Y(y)|\psi\rangle = 0$.
(iii) 任意の実数 x に対して，$P^X(x)|\psi\rangle = P^Y(x)|\psi\rangle$.
(iv) 任意の多項式 f に対して，$f(X)|\psi\rangle = f(Y)|\psi\rangle$.
(v) 閉部分空間 $\mathcal{C}(X, |\psi\rangle)$ に属するすべての状態 $|\phi\rangle$ とすべての実数 x に対して，$\|P^X(x)|\phi\rangle\|^2 = \|P^Y(x)|\phi\rangle\|^2$.

条件 (ii) における $\langle\psi|P^X(x)P^Y(y)|\psi\rangle$ は弱結合分布と呼ばれ，$P^Y(y)$ の弱測定と $P^X(x)$ に関する事後選択によって計測可能である[*6]．よって，X と Y は状態 $|\psi\rangle$ において完全相関するかどうかも $P^Y(y)$ の弱測定と $P^X(x)$ に関する事後選択によって計測可能である．

*6 弱結合分布については，文献 [14] を参照．

5　測定過程

ヒルベルト空間 $\mathcal{K}$, ヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ の単位ベクトル ξ，テンソル積 $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ 上のユニタリ作用素 U，ヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ 上の物理量 M からなる 4 つ組 $(\mathcal{K}, |\xi\rangle, U, M)$ を一般に**測定過程**と呼ぶ [15]．測定は，時刻 0 から時刻 τ に挿入される測定相互作用によって行われ，U は，それによる対象 **S** と装置 **A** の合成系の時間発展を表す．測定過程 $(\mathcal{K}, |\xi\rangle, U, M)$ による測定の測定値を変数 $\mathbf{x}$ で表すと，状態 $|\psi\rangle$ における測定値の確率分布は

$$\Pr\{\mathbf{x}=x\} = \Pr\{M(\tau)=x\} = \|P^{M(\tau)}(x)|\psi\rangle|\xi\rangle\|^2 \tag{9}$$

と定義される．測定過程 $(\mathcal{K}, |\xi\rangle, U, M)$ の POVM $\Pi(x)$ が次式で定義される*7．

$$\Pi(x) = \langle\xi|P^{M(\tau)}(x)|\xi\rangle. \tag{10}$$

POVM $\Pi(x)$ を用いると測定値の確率分布は，

$$\Pr\{\mathbf{x}=x\} = \langle\psi|\Pi(x)|\psi\rangle \tag{11}$$

で与えられる．

$\Pi = P^A$ が成立するときに測定過程 $(\mathcal{K}, |\xi\rangle, U, M)$ は物理量 A を測定するという．これは，この測定過程が任意の状態 $|\psi\rangle$ において確率再現可能性 $\Pr\{A(0)=x\} = \Pr\{M(\tau)=x\}$ を満たすことを意味するが，さらに定理 2 から所有値再現可能性を満たすことが導かれる．

定理 3. 測定過程 $(\mathcal{K}, |\xi\rangle, U, M)$ によって物理量 A が測定される，つまり，被測定系の任意の状態 $|\psi\rangle$ において任意の状態 $|\psi\rangle$ において確率再現可能性

$$\Pr\{M(\tau)=x\} = \Pr\{A(0)=x\}$$

が任意の $x\in\mathbb{R}$ について成り立てば，被測定系の任意の状態 $|\psi\rangle$ において所有値再現可能性

$$\Pr\{M(\tau)=A(0)\} = 1.$$

が成り立つ．

物理量 $A=\sum_n a_n|\phi_n\rangle\langle\phi_n|$ のフォン・ノイマンの測定過程 (1) を一般化すると，次の測定過程が考えられる．

$$U : |\phi_n\rangle|\xi\rangle \mapsto |\phi'_n\rangle|\xi_n\rangle. \tag{12}$$

ここで，$\{|\phi'_n\rangle\}$ は必ずしも直交するとは限らない，被測定系の任意の状態の族である．対象の初期状態を $|\psi\rangle=\sum_n c_n|\phi_n\rangle$ とすると，U の線形性から

$$U|\psi\rangle|\xi\rangle = \sum_n c_n|\phi'_n\rangle|\xi_n\rangle \tag{13}$$

が得られる．すると，

$$\Pr\{A(0)=a_n\} = \Pr\{M(\tau)=a_n\} = |c_n|^2 \tag{14}$$

*7 一般に，POVM（probability operator-valued measure）とは，正値作用素の族 $\{\Pi(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ で $\sum_{x\in\mathbb{R}}\Pi(x)=I$ を満たすものである．任意の物理量 X の単位の分解は，POVM の一種である．

より，この測定過程は確率再現可能性を持つ．よって定理 3 よりこの測定は所有値再現可能性を持つ．実際,

$$
\begin{aligned}
P^{A(0)}(a_n)|\psi\rangle|\xi\rangle &= c_n|\phi_n\rangle|\xi\rangle, \\
P^{M(\tau)}(a_n)|\psi\rangle|\xi\rangle &= U^\dagger P^{M(0)}(a_n)U|\psi\rangle|\xi\rangle = c_n|\phi_n\rangle|\xi\rangle,
\end{aligned}
$$

より，

$$
\begin{aligned}
\Pr\{A(0)=M(\tau)\} &= \sum_n \|P^{A(0)}(a_n)\wedge P^{M(\tau)}(a_n)|\psi\rangle|\xi\rangle\|^2 = \sum_n (P^{A(0)}(a_n)|\psi\rangle|\xi\rangle, P^{M(\tau)}(a_n)|\psi\rangle|\xi\rangle) \\
&= \sum_n |c_n|^2 = 1
\end{aligned}
$$

が得られ，所有値再現可能性が成り立つことがわかる．

6 状態依存的測定可能性

測定過程 $(\mathcal{K}, |\xi\rangle, U, M)$ によって状態非依存的に物理量 A が測定されるとは，測定過程の POVM Π が $\Pi = E^A$ を満たすことであった．このことは，任意の状態 $|\psi\rangle$ において，確率再現可能性が成立することであるといっても，所有値再現可能性が成立することであるといっても論理的には同値であった．では，測定過程 $(\mathcal{K}, |\xi\rangle, U, M)$ によって状態 $|\psi\rangle$ において状態依存的に物理量 A が測定されるとは，どのようなことを意味するのであろうか．従来は，それは状態 $|\psi\rangle$ において確率再現可能性が成立することであると考えられていたが [10]，そのような考えは，古典的な測定概念からの大きな逸脱を招き，いくつかの不都合な事態を招いてきた [16]．定理 3 に従って，測定過程 $(\mathcal{K}, |\xi\rangle, U, M)$ によって状態 $|\psi\rangle$ において物理量 A が測定されるとは，状態 $|\psi\rangle$ において所有値再現可能性，つまり

$$
\Pr\{A(0)=M(\tau)\} = 1 \tag{15}
$$

が成立することであると定義するのが自然である．このとき，次の定理が成立する [13].

定理 4. 測定過程 $(\mathcal{K}, |\xi\rangle, U, M)$ が POVM Π を持つとき，次の条件は互いに同値である．

(i) 測定過程 $(\mathcal{K}, |\xi\rangle, U, M)$ によって状態 $|\psi\rangle$ において物理量 A が測定される．
(ii) $x \neq y$ ならば，$\langle\psi|\Pi(x)P^A(y)|\psi\rangle = 0$ が成り立つ．
(iii) $\Pi(x)|\psi\rangle = P^A(x)|\psi\rangle$ が任意の $x \in \mathbb{R}$ について成り立つ．

弱測定と事後選択の方法によって $\langle\psi|\Pi(x)P^A(y)|\psi\rangle$ が計測可能であるから，状態 $|\psi\rangle$ において物理量 A が測定されるかどうかを操作的に判定する方法が存在する．

7 量子 2 乗平均平方根誤差

状態 $|\psi\rangle$ において一般の測定過程 $\mathbf{M} = (\mathcal{K}, |\xi\rangle, U, M)$ によって物理量 A を測定する場合の測定誤差を定義するために，古典物理学の 2 乗平均平方根誤差の概念を拡張する問題を考えよう．そのために，状態 $|\psi\rangle$ において測定過程 $\mathbf{M}$ による物理量 A の測定に関する量子 2 乗平均平方根誤差を一般に $\varepsilon(A, |\psi\rangle, \mathbf{M})$ と表し，それが満たすべき条件を考察する [16].

(I) （操作的定義可能性）$\varepsilon(A, |\psi\rangle, \mathbf{M})$ は，測定過程 $\mathbf{M}$ の POVM Π, 被測定量 A，被測定状態 $|\psi\rangle$ によって定義可能である．

(II)（対応原理）$A(0)$ と $M(\tau)$ が状態 $|\psi\rangle|\xi\rangle$ において可換ならば，$A(0)$ と $M(\tau)$ の結合確率分布で定まる古典的２乗平均平方根誤差と一致する．すなわち，

$$\varepsilon(A,|\psi\rangle,\mathbf{M})^2=\sum_{x,y}(x-y)^2\langle\psi,\xi|P^{A(0)}(x)P^{M(\tau)}|\psi,\xi\rangle \tag{16}$$

が成り立つ．

(III)（健全性）測定過程 $\mathbf{M}$ による状態 $|\psi\rangle$ における物理量 A の測定が正確ならば，$\varepsilon(A,|\psi\rangle,\mathbf{M})=0$ が成り立つ．

(IV)（完全性）$\varepsilon(A,|\psi\rangle,\mathbf{M})=0$ ならば測定過程 $\mathbf{M}$ による状態 $|\psi\rangle$ における物理量 A の測定は正確である．

一般に $N(A)=M(\tau)-A(0)$ を測定過程 $\mathbf{M}$ の物理量 A に対する誤差作用と呼ぶ．誤差 $\varepsilon(A,|\psi\rangle,\mathbf{M})$ が対応原理を満たすならば, (5) より $A(0)$ と $M(\tau)$ が状態 $|\psi\rangle|\xi\rangle$ において可換ならば, $\varepsilon(A,|\psi\rangle,\mathbf{M})=\|N(A)|\psi\rangle|\xi\rangle\|$ が成り立つ．そこで，任意の $|\psi\rangle$ に対して

$$\varepsilon_{NO}(A,|\psi\rangle,\mathbf{M})=\|N(A)|\psi\rangle|\xi\rangle\| \tag{17}$$

と定義される誤差を誤差作用素型量子２乗平均平方根誤差と呼ぶ．これは，(I)–(III) を満たすが，(IV) を満たさないことが知られている [17]. また，(II) を満たせば (III) は自動的に満たされる．誤差 $\varepsilon(A,|\psi\rangle,\mathbf{M})$ が対応原理を満たすことと $A(0)$ と $M(\tau)$ が状態 $|\psi\rangle|\xi\rangle$ において可換ならば，$\varepsilon(A,|\psi\rangle,\mathbf{M})=\varepsilon_{NO}(A,|\psi\rangle,\mathbf{M})$ が成り立つことは同値である．そこで，

$$\overline{\varepsilon}(A,|\psi\rangle,\mathbf{M})=\sup_{t\in\mathbb{R}}\varepsilon_{NO}(A,e^{itA}|\psi\rangle,\mathbf{M}) \tag{18}$$

で定まる誤差 $\overline{\varepsilon}(A,|\psi\rangle,\mathbf{M})$ を局所一様量子２乗平均平方根誤差と呼ぶ．次の定理が成り立つ．

定理 5. 測定過程 $\mathbf{M}=(\mathcal{K},|\xi\rangle,U,M)$，物理量 A，状態 $|\psi\rangle$ に対して，次の命題が成り立つ．

(i) 誤差作用素型量子２乗平均平方根誤差 $\varepsilon_{NO}(A,|\psi\rangle,\mathbf{M})$ は，(I)–(III) の条件を満たす．
(ii) 局所一様量子２乗平均平方根誤差 $\overline{\varepsilon}(A,|\psi\rangle,\mathbf{M})$ は，(I)–(IV) の条件をすべて満たす．
(iii) $A(0)$ と $M(\tau)$ が状態 $|\psi\rangle|\xi\rangle$ で可換ならば，$\overline{\varepsilon}(A,|\psi\rangle,\mathbf{M})=\varepsilon_{NO}(A,|\psi\rangle,\mathbf{M})$ が成り立つ．
(iv) $A(0)^2=M(\tau)^2=I$ ならば，$\overline{\varepsilon}(A,|\psi\rangle,\mathbf{M})=\varepsilon_{NO}(A,|\psi\rangle,\mathbf{M})$ が成り立つ．

8　ハイゼンベルクの不確定性原理

1927 年にハイゼンベルク [18] は，位置 Q と運動量 P を同時に正確に測定することはできず，両者を近似的に同時測定する場合，位置の測定誤差 $\varepsilon(Q)$ と運動量の測定誤差 $\varepsilon(P)$ の間に

$$\varepsilon(Q)\varepsilon(P)\geq\frac{\hbar}{2} \tag{19}$$

という不確定性関係が成り立たなければならないことを示した．これをハイゼンベルクの不確定性原理と呼ぶ．ただし，この主張を正確に理解するためには，いくつかの曖昧な点を明らかにする必要がある．

当時，「測定」という言葉で表される物理的操作は，現在の量子力学で理解されるものより大きく制約されていた．当時の量子力学では，正しい測定は，確率再現可能性と反復可能性を満たすことが要請されていた．そこで，状態 $|\psi\rangle$ において測定誤差 $\varepsilon(A)$ で物理量 A を近似測定するならば，反復可能性を $\varepsilon(A)$ 程度の誤差で満たさなければならないという要請が生まれる．この要請を理解するためには，反復可能性を定量的に表す

必要がある．反復可能性とは，測定後の状態が，測定値を固有値とする固有状態に変化することであるから，測定値 a を得た測定後の状態を $|\psi_a\rangle$ とすると，

$$\|A|\psi_a\rangle - a|\psi_a\rangle\| = 0 \tag{20}$$

が成り立つ．そこで，正数 $\varepsilon > 0$ に対して，測定が ε-近似的に反復可能であるとは，

$$\|A|\psi_a\rangle - a|\psi_a\rangle\| \le \varepsilon \tag{21}$$

が成り立つことであると定義する．この時，一般に $|\psi_a\rangle$ は，物理量 A の実数 a に対する ε-近似的固有状態と呼ばれる．つまり，測定が ε-近似的反復可能であるとは，測定後の状態が測定値に対する ε-近似的固有状態に変化することである．

そこで，物理量 A を測定誤差 $\varepsilon(A)$ で測定するならば，測定は $\varepsilon(A)$-近似的に反復可能でなければならないという要請をおくと，ハイゼンベルクの不確定性原理を証明することができる．

つまり，Q と P をそれぞれ測定誤差 $\varepsilon(Q)$ と $\varepsilon(P)$ で同時測定して，それぞれ測定値 q, p を得た直後の状態を $|\psi_{q,p}\rangle$ とすると，これは，Q の q に対する $\varepsilon(Q)$-近似的固有状態であり，かつ，P の p に対する $\varepsilon(P)$-近似的固有状態であるから，

$$\|Q|\psi_{q,p}\rangle - q|\psi_{q,p}\rangle\| \le \varepsilon(Q), \tag{22}$$

$$\|P|\psi_{q,p}\rangle - p|\psi_{q,p}\rangle\| \le \varepsilon(P) \tag{23}$$

が得られる．ところで，状態 $|\psi_a\rangle$ における A の標準偏差を $\sigma(A, |\psi_a\rangle)$ とすると，一般に任意の実数 a について

$$\sigma(A, |\psi_a\rangle) = \|A|\psi_a\rangle - \langle A\rangle|\psi_a\rangle\| \le \|A|\psi_a\rangle - a|\psi_a\rangle\| \tag{24}$$

が成り立つので，(22), (23) より

$$\varepsilon(Q)\varepsilon(P) \ge \sigma(Q, |\psi_{q,p}\rangle)\sigma(P, |\psi_{q,p}\rangle) \tag{25}$$

が成り立つ．ハイゼンベルクは，論文 [18] において $|\psi_{q,p}\rangle$ がいわゆる最小不確定波束だと仮定して，

$$\sigma(Q, |\psi_{q,p}\rangle)\sigma(P, |\psi_{q,p}\rangle) = \frac{\hbar}{2} \tag{26}$$

を導き，(19) を結論している．その直後に，ケナード [19] は，$\psi_{q,p}$ が一般の波動関数だと仮定して，

$$\sigma(Q, |\psi_{q,p}\rangle)\sigma(P, |\psi_{q,p}\rangle) \ge \frac{\hbar}{2} \tag{27}$$

を導き，(19) の証明は完結した．

以下では，一般の測定過程 $(\mathcal{K}, |\xi\rangle, U, M)$ による A,B の近似的同時測定とは，二つの関数 f, g を用いて，$(\mathcal{K}, |\xi\rangle, U, f(M))$ によって A を測定し，同時に $(\mathcal{K}, |\xi\rangle, U, g(M))$ によって B を測定するものとする．この場合のそれぞれの測定誤差を

$$\varepsilon_{NO}(A, |\psi\rangle) = \|f(M)(\tau)|\psi\rangle|\xi\rangle - A(0)|\psi\rangle|\xi\rangle\|, \tag{28}$$

$$\varepsilon_{NO}(B, |\psi\rangle) = \|g(M)(\tau)|\psi\rangle|\xi\rangle - B(0)|\psi\rangle|\xi\rangle\|, \tag{29}$$

$$\overline{\varepsilon}(A, |\psi\rangle) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \varepsilon_{NO}(A, e^{-itA}|\psi\rangle), \tag{30}$$

$$\overline{\varepsilon}(B, |\psi\rangle) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \varepsilon_{NO}(B, e^{-itB}|\psi\rangle) \tag{31}$$

これらに対して次の形の不確定性関係が成り立つ [20, 21, 22].

定理 6. $\varepsilon = \varepsilon_{NO}$ または $\varepsilon_0 = \overline{\varepsilon}$ とする．任意の物理量 A, B および状態 $|\psi\rangle$ に対して，$C_{AB} = \frac{1}{2}|\langle\psi|[A,B]|\psi\rangle|$ とおくと，次の関係が成り立つ．

(i) $\varepsilon(A)\varepsilon(B) + \sigma(B)\varepsilon(A) + \sigma(A)\varepsilon(B) \geq C_{AB}$.

(ii) $\sigma(B)^2\varepsilon(A)^2 + \sigma(A)^2\varepsilon(B)^2 + 2\varepsilon(A)\varepsilon(B)\sqrt{\sigma(A)^2\sigma(B)^2 - C_{AB}^2} \geq C_{AB}^2$.

9　むすび

ハイゼンベルク [18] は，不確定性原理を導入するためにガンマ線顕微鏡の思考実験を考察した．ガンマ線顕微鏡を粒子の位置の測定装置と考えると，その誤差は，光学的分解能に対応し，誤差は，用いられる光の波長に比例する．一方，コンプトン散乱の理論により光の散乱は光の波長に反比例する大きさで粒子の運動量変化を伴うので，位置測定後に運動量の測定を行なうと，光の波長に反比例する誤差が伴う．ハイゼンベルクは，このようにして，位置測定の誤差と運動量測定の誤差の積が一定の値を持つことを導いた．ところで，この議論から，「ガンマ線顕微鏡の思考実験における位置測定の誤差と運動量測定の誤差は，用いられる光の波長で定まり，粒子の状態と独立である」[10] という誤った主張がなされることがあるので注意が必要である．というのは，光学的分解能が光の波長で定まるためには，測定される粒子が顕微鏡の視野の適切な場所に存在しなければならないからで，位置測定や運動量測定の誤差が光の波長で定まるためには対象の状態が極めて限定された状態になければならない．従って，ガンマ線顕微鏡の思考実験における誤差の概念は状態依存的であり，ガンマ線顕微鏡の思考実験は対象がある限られた状態にあるときだけ成立する議論であることが結論される．

第 1 節のシュレーディンガーの議論において，測定に反復可能性を求める根拠は，反復可能性によって，測定値に対応する被測定量の値の実在性を保証するためであると理解することができる．つまり，反復可能性が満たされるということは，$M(\tau)$ と $A(\tau)$ の間に完全相関が成立するので，測定値 $M(\tau) = x$ から被測定量の値 $A(\tau) = x$ を被測定系を乱すことなく予言できる．従って，よく知られた実在性の判定基準 [23] から測定値によって定まる被測定量の測定直後の値が実在することが導かれる．ただし，実在性の判定基準を実際に測定されない物理量の間に用いることはできないことが，アインシュタイン-ポドルスキー-ローゼン (EPR)[23] に対するボーア [24] の反論で明らかにされているが，この場合は，物理量 $M(\tau)$ は実際に測定される物理量なので，そのような問題は起こらない [25].

本稿では，反復可能性を仮定することなく，任意の状態で確率再現性を持つ測定は，所有値再現可能性を持つことを示した．これによって，$M(\tau)$ と $A(0)$ の間に完全相関が成立するので，測定値 $M(\tau) = x$ から被測定量の値 $A(0) = x$ を被測定系を乱すことなく予言することができる．この予言の正しさは，$A(0)$ に対する弱測定と $M(\tau)$ に対する事後選択で確認することができる．よって，実在性の判定基準から測定値によって定まる被測定量の測定直前の値が実在することが導かれる．

つまり，正確な測定によって**実際に得られた測定値**は測定前に実在した被測定量の値を再現する．これは，コッヘン- シュペッカーの定理と矛盾しない．というのは，被測定量の値の実在性は，$M(\tau)$ の測定という文脈指定の下でのみ意味を持つからである．

参考文献

[1] E. Schrödinger, Naturwissenshaften, vol.23, pp.807–812,823–828,844–849, 1935. [E. シュレーディンガー (著), 井上健 (訳)「量子力学の現状」， 湯川秀樹, 井上健 (共編)『世界の名著 66』, (中央公論社，1970),

pp. 357–408].

[2] J. von Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer, Berlin, 1932. [J. フォン・ノイマン (著), 広重 徹, 井上 健, 恒藤敏彦 (共訳)『量子力学の数学的基礎』 (みすず書房, 1957)].

[3] P.A.M. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics, 4th edition, Oxford UP, Oxford, 1958.

[4] S. Kochen and E.P. Specker, J. Math. Mech., vol.17, pp.59–87, 1967.

[5] J.S. Bell, Physics, vol.1, pp.195–200, 1964.

[6] B. Hensen *et al.*, Nature, vol.526, pp.682–686, 2015.

[7] M. Giustina *et al.*, Phys. Rev. Lett., vol.115, p.250401, 2015.

[8] L.K. Shalm *et al.*, Phys. Rev. Lett., vol.115, p.250402, 2015.

[9] J. Bell, Physics World, vol.3, no.8, pp.33–41, 1990.

[10] P. Busch, P. Lahti, and R.F. Werner, Rev. Mod. Phys., vol.86, pp.1261–1281, 2014.

[11] M. Ozawa, Found. Phys., vol.41, pp.592–607, 2011.

[12] M. Ozawa, New Generat. Comput., vol.**34**, pp.125–152, 2016.

[13] M. Ozawa, Ann. Physics, vol.321, pp.744–769, 2006.

[14] M. Ozawa, AIP Conf. Proc., vol.1363, pp.53–62, 2011. e-print arXiv:1106.5083 [quant-ph].

[15] M. Ozawa, J. Math. Phys., vol.25, pp.79–87, 1984.

[16] M. Ozawa, npj Quantum Inf., vol.5, p.1, 2019.

[17] P. Busch, T. Heinonen, and P. Lahti, Phys. Lett. A, vol.320, pp.261–270, 2004.

[18] W. Heisenberg, Z. Phys., vol.43, pp.172–198, 1927.

[19] E.H. Kennard, Z. Phys., vol.44, pp.326–352, 1927.

[20] M. Ozawa, Phys. Rev. A, vol.67, p.042105, 2003.

[21] M. Ozawa, Int. J. Quant. Inf., vol.1, pp.569–588, 2003.

[22] C. Branciard, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, vol.110, pp.6742–6747, 2013.

[23] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, Phys. Rev., vol.47, pp.777–780, 1935.

[24] N. Bohr, Phys. Rev., vol.48, pp.696–702, 1935.

[25] H. Halvorson and R. Clifton, in Non-locality and Modality, eds. by T. Placek and J. Butterfield, pp.3–18, Kluwer, Dordrecht, 2002.